2013학년도 숭실대학교 모의 논술고사(자연계)

※ 주의사항(인문, 경상, 자연 공통사항)
① 답안지에 제목과 소제목을 달지 마시오.
② 답안지에 자신을 드러내는 표현을 쓰지 마시오.
③ 제시문의 문장을 직접 인용할 경우에는 인용 표시(“ ”)를 하시오.
④ 제시문의 문장을 직접 인용하는 경우 외에는 본문의 일부를 그대로 옮겨 쓰지 마시오.
⑤ **연필 또는 흑색필기구**만 사용하여 답안을 작성하시오(그 이외 색필기구는 부정행위에 해당).

문제 1-A 다음 논제에 답하시오. (20점)

어떤 기업에서 두 가지 제품 A, B를 생산하고 있다. A와 B를 만드는데 공통의 원료가 사용되며, A 제품을 q kg 생산하는데 이 원료가 $0.1q^2$ kg 사용되며, B 제품을 q kg 생산하는데 이 원료가 $0.2q^2$ kg 사용된다. 제조공정의 특성상 이 두 제품은 여러 번 나누어서 생산할 수 없으며, 한 번의 공정으로 전량 생산해야 한다. 두 제품을 생산하는데 이 원료를 최대 30 kg까지 사용할 수 있으며, A와 B의 kg 당 판매가는 각각 10,000원, 20,000원이다. 이러한 상황에서 총판매액을 최대화하기 위한 각 제품의 생산량을 결정하고자 한다.

(1) A의 생산량을 x, B의 생산량을 y로 정의(단, $x \geq 0, y \geq 0$)할 경우 총판매액(z)을 x, y의 함수로 나타내시오. 또 원료 사용량에 따른 제약조건을 부등식으로 나타내고, 이를 xy-좌표평면 상의 영역으로 도해하시오.

(2) 총판매액을 최대화하는 A와 B의 생산량을 구하시오. 이 때 총판매액은 얼마인지 구하시오.

자연계 문제 1-A 채점기준

▶출제의도

본 문제는 현실에서 직면하는 다양한 의사결정 상황을 해결하기 위해 수학적 모형을 작성하여 그 해를 구함으로써 최적의 의사결정을 도모하는 방법인 수리계획법(Mathematical Programming)에 관한 것이다. 본 문제를 해결하기 위해서는 먼저 결정하고자 하는 변수를 정의하고, 정의된 변수를 사용하여 최대화하고자 하는 목적함수(총판매액)를 구한다. 또한 문제에서 주어진 제약조건을 부등식의 영역으로 나타내고, 주어진 제약조건 하에서 총판매액을 최대화하는 변수 값을 구한다.

▶예시답안

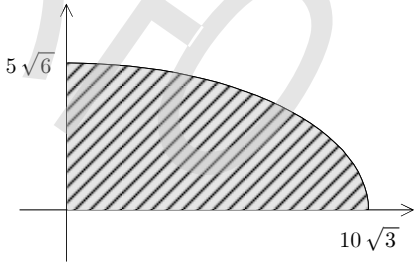
(1) 총판매액(z)을 x와 y의 함수로 나타내면 다음과 같다.

$$z = f(x, y) = 10{,}000x + 20{,}000y$$

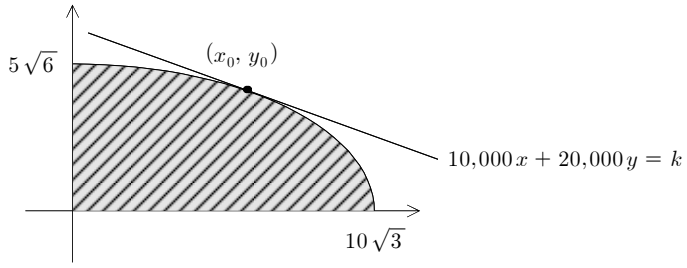
원료 사용량에 따른 제약조건을 부등식으로 나타내면 다음과 같다.

$$0.1x^2 + 0.2y^2 \leq 30,\ x \geq 0, y \geq 0$$

이를 xy-좌표평면 상에 도해하면 다음 그림과 같다.



(2) 아래의 그림으로부터 총판매액 z가 최대가 되도록 하는 (x_0, y_0) 값은 직선 $10{,}000x + 20{,}000y = k$가 타원과 접할 때이다. 이때 타원의 접선의 기울기와 직선의 기울기($=-0.5$)가 같아지므로 다음과 같이 구할 수 있다.



타원 위의 점 (x_0, y_0)에서 접선의 기울기를 구하기 위해 음함수 미분법을 이용하면

$$2\times 0.1x + 2\times 0.2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$$

이다. 따라서 점 (x_0, y_0)에서 접선의 기울기는 $-\dfrac{x_0}{2y_0}$가 되고 이 값이 -0.5이므로 $x_0 = y_0$가 된다. 이를 $x_0^2 + 2y_0^2 = 300$과 연립하여 풀면 $x_0 = y_0 = 10$이다. ($x_0 \geq 0, y_0 \geq 0$이어야 하므로) 즉 제품 A를 10kg, 제품 B를 10kg 생산할 때 총판매액이 최대가 되며, 이때 총판매액은 300,000원이다.

문제 1-B 다음 논제에 답하시오. (30점)

어떤 공장에서 사용하고 있는 기계장비는 매일 일과시간 사용 중 20%에서 고장이 발생한다. 하루의 일과를 마친 후 장비의 상태를 점검하여 고장이 발생한 장비 (이전에 고장이 난 장비를 포함) 가운데 50%의 수리를 그날 마친다. 매일 일과를 시작할 때 정상적으로 작동하는 장비의 비율에 대한 변화를 조사하기 위해 다음의 2×2 행렬 P를 이용하고자 한다. 일과를 시작할 때의 장비 상태를 정상은 1, 고장은 2로 나타내고, 행렬 P의 (i, j)-원소 p_{ij} (여기서 i, j=1 또는 2)는 어느 날 일과 시작시 j 상태에 있던 장비가 그다음 날 일과 시작시 i 상태에 있을 확률로 정의한다. 예를 들어 p_{21}은 어느 날 일과 시작시 정상(1) 상태에 있던 장비가 그다음 날 일과 시작시 고장(2) 상태에 있을 확률이다.

$$\begin{array}{cc} & \underline{\text{어느 날}} \\ & \begin{array}{cc} \text{정상(1)} & \text{고장(2)} \end{array} \\ \underline{\text{그다음 날}} \begin{array}{c} \text{정상(1)} \\ \text{고장(2)} \end{array} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

(1) 행렬 P를 구하시오.

(2) 어느 날 일과 시작시 모든 장비가 정상 작동하고 있다면, 이로부터 이틀 후 일과 시작시 정상 작동하는 장비는 전체의 몇 %인지 구하시오.

(3) 매일 일과 시작시마다 정상 작동하는 장비의 비율이 동일하게 유지된다면, 정상 작동하는 장비는 전체의 몇 %인지 구하시오.

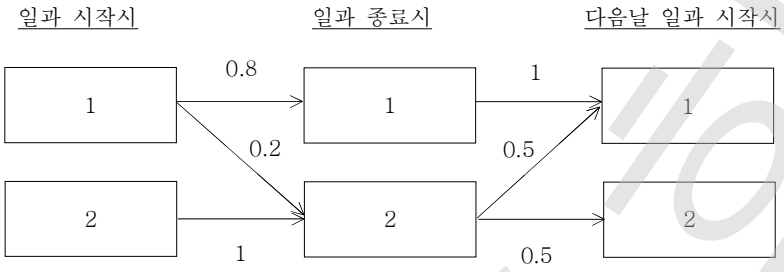
자연계 문제 1-B 채점기준

▶출제의도

본 문제는 조건부 확률의 개념을 이해하여 논제의 상황에 맞는 수식을 도출하고, 행렬을 이용하여 이를 해결하는 능력을 평가하는데 그 목적이 있다. 본 논제를 해결하기 위해서는 주어진 조건부 확률로부터 상태 변화의 확률을 행렬로 표현하고, 이 행렬을 이용하여 현재의 어떤 상태로부터 미래의 상태변화를 수리적으로 모형화하여 정확히 계산하는 능력이 필요하다.

▶예시답안

(1) 어느 날의 일과시간과 일과시간 이후 상태의 변화와 이에 대응하는 확률을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



$p_{11} = 0.8 \times 1 + 0.2 \times 0.5 = 0.9,$ $\quad p_{12} = 1 \times 0.5 = 0.5,$

$p_{21} = 0.2 \times 0.5 = 0.1,$ $\quad p_{22} = 1 \times 0.5 = 0.5.$

그러므로 $P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$이다.

(2) 어느 날 정상 상태에 있는 장비가 이틀 후 정상 상태에 있기 위해서는 일과 시작시 장비의 상태 변화 과정이 다음의 두 가지 경우가 가능하다.

① 정상 ==> 정상 ==> 정상

② 정상 ==> 고장 ==> 정상

①의 확률은 $0.9 \times 0.9 = 0.81$이고, ②의 확률은 $0.1 \times 0.5 = 0.05$이므로 이 둘을 합하여 정상 작동하는 장비의 비율을 구하면 86%이다.

※ 행렬의 연산을 이용한 풀이 방법

(2) 어느 날 일과 시작시 정상 상태인 장비의 비율을 p_1, 고장 상태인 장비의 비율을 p_2라 하면

다음 날 일과 시작시 정상 상태인 장비의 비율: $q_1 = p_{11} \times p_1 + p_{12} \times p_2$

다음 날 일과 시작시 고장 상태인 장비의 비율: $q_2 = p_{21} \times p_1 + p_{22} \times p_2$

이를 행렬로 표현하면 $\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$이 된다. 마찬가지로 이틀 후 일과 시작시 정상 상태인 장비의 비율과 고장 상태인 장비의 비율은

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

이다. $\begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.86 \\ 0.14 \end{bmatrix}$이므로 정상 작동하는 장비는 전체의 86%이다.

(3) 어느 날 일과 시작시 정상 상태인 장비의 비율을 p_1, 고장 상태인 장비의 비율을 p_2라 하면

다음 날 일과 시작시 정상 상태인 장비의 비율: $q_1 = p_{11} \times p_1 + p_{12} \times p_2$

다음 날 일과 시작시 고장 상태인 장비의 비율: $q_2 = p_{21} \times p_1 + p_{22} \times p_2$

매일 일과 시작시 p_1, p_2의 값이 동일하게 유지되므로 $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2$이다.

따라서 $p_1 = 0.9p_1 + 0.5p_2$, $p_2 = 0.1p_1 + 0.5p_2$이다. 여기서 정상 및 고장 상태인 장비의 비율의 합은 1이므로 $p_1 + p_2 = 1$이다. 이를 이용하여 p_1을 구하면 $p_1 = \frac{5}{6}$이므로 정상 작동하는 장비는 전체의 $\frac{500}{6}\%$ (약 83.33%)이다.

※ 행렬의 연산을 이용한 풀이 방법

(3) 매일 일과 시작시마다 정상 작동하는 장비의 비율을 p_1, 고장 상태인 장비의 비율을 p_2라 하자. p_1, p_2의 값이 동일하게 유지되므로 p_1, p_2는

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

을 만족해야 한다. 따라서

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \text{과 } p_1 + p_2 = 1 \text{ (정상 및 고장 상태인 장비의 비율의 합은 1이므로)}$$

을 연립하여 p_1을 구하면 $p_1 = \frac{5}{6}$이므로 정상 작동하는 장비는 전체의 $\frac{500}{6}\%$ (약 83.33%)이다.

문제 2-A 다음 논제에 답하시오. (30점)

(1) 다음은 동물의 크기와 무게를 측정한 연구결과이다.

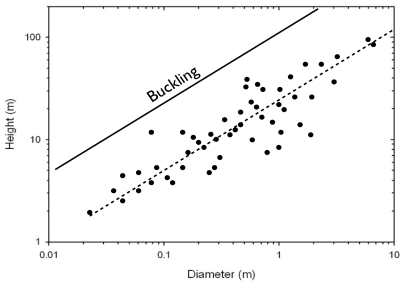
> Stahl과 Gummerson은 타마린, 긴꼬리원숭이, 비비 등과 같은 영장류 동물의 몸통 둘레를 측정하여 체중과의 상관관계를 도출하였다. 약 0.2~30 kg 사이의 다양한 개체들을 측정한 결과 (체중)^{x}에 비례하여 몸통둘레가 증가한다는 것을 확인하였다.

다음 설명들을 이용하여 위의 x값을 유추하되 그 과정을 단계별로 보이시오.

(가) 동물의 몸은 높이 h와 지름 d인 원통으로 생각할 수 있다.

(나) 부피와 체중은 비례하다고 생각할 수 있다.

(다) McMahon은 높이가 약 2~100 m 사이인 다양한 종의 나무 576 그루의 높이(height)와 밑동 지름(diameter)에 대한 분포도를 오른쪽 그림과 같이 보인 바 있다. 그림은 가로축을 지름의 로그, 세로축을 높이의 로그로 하여 데이터들을 점으로 찍은 것인데, 점들은 거의 일직선상에 놓였고 그 기울기가 2/3이었다. 이 결과를 영장류 동물에도 적용할 수 있다고 가정한다.



(2) 지구와 행성 X의 질량과 반지름이 오른쪽 표와 같다.

	질량 (kg)	반지름 (m)
지구	6.0×10^{24}	6.4×10^{3}
행성 X	9.6×10^{25}	1.6×10^{3}

(2-1) 천체 표면에서의 중력은 천체의 질량에 비례하고 중심으로부터의 거리의 제곱에 반비례한다. 행성 X 표면에서의 중력은 지구 표면에서의 중력의 몇 배인지 표에 나온 값을 이용하여 계산하시오.

(2-2) 동물의 뼈의 굵기가 몸통 둘레에 비례한다고 가정하자. 이 때, 만약 지구상의 동물이 행성 X의 표면에서 산다면 뼈의 굵기가 몇 배 늘어나야 될지 (1)의 결과를 이용하여 유추해 보시오.

자연계 문제 2-A 채점기준

▶출제의도

본 문제는 주어진 상관관계를 이해하여 최종적으로 얻고자 하는 비례관계를 도출하는 능력을 평가하는데 그 목적이 있다. 본 논제를 해결하기 위해서는 과학적인 관측값을 수학적인 관계식으로 해석하고 계산하는 능력이 필요하다.

▶예시답안

(1) 동물의 몸을 높이 h와 지름 d인 원통으로 생각하면, (부피)는 hd^2에 비례한다. 부피증가와 체중증가는 동일하므로, (체중)은 hd^2에 비례한다. 다양한 종의 나무들을 분석한 결과는 높이 h가 $d^{2/3}$에 비례하였으며, 이를 영장류 동물에 적용한다면 (체중)은 $d^{8/3}$에 비례한다. 즉, 지름 d는 (체중)$^{3/8}$에 비례한다. 몸통둘레는 d에 비례하므로, 몸통둘레는 (체중)$^{3/8}$에 비례하여 증가한다. 따라서 논제의 x는 3/8이 되어야 한다.

(2)
(2-1) 천체표면의 중력이 질량에 비례하고 중심으로부터의 거리의 제곱에 반비례하므로 다음 관계식을 쓸 수 있다.

$$\frac{W_X}{W_E} = \frac{M_X/r_X^2}{M_E/r_E^2} \equiv \frac{M_X}{M_E}\left(\frac{r_E}{r_X}\right)^2 = 16 \cdot 4^2 = 256$$

즉, 행성 **X** 표면에서의 중력은 지구 표면에서의 중력의 256배이다.

(2-2) 행성 **X** 표면에서는 동물의 체중이 지구 표면에서보다 256배 크다고 할 수 있다. 즉, 체중이 256배 늘어나면 몸통둘레는 (1)의 결과에 따라서 $(256)^{3/8} = (2^8)^{3/8} = 8$배 늘어나게 된다. 뼈의 굵기가 몸통 둘레에 비례한다면, 뼈의 굵기도 8배 늘어나게 된다.

문제 2-B 다음 논제에 답하시오. (20점)

동물이나 나무와 같이 큰 물체의 크기를 잴 때는 개별측정이 쉽지만 수많은 작은 입자들이 있는 경우에는 그 각각의 크기를 모두 측정하는 것은 현실적으로 불가능하다. 이때는 다양한 기기분석을 이용할 수 있는데, 흔한 방법들 중 하나는 다양한 크기의 구멍을 지니는 체를 이용하는 것이다. 아래 사진과 같이 구멍의 크기가 작은 체가 밑으로 오도록 여러 체를 쌓은 후 전체 분말을 제일 위에 놓고 오랫동안 흔들어 주면, 개별 입자는 자신의 크기보다 구멍이 작은 체와 큰 체 사이에 놓이게 된다. 이렇게 세분된 분말들의 무게를 측정하면 평균 입자크기를 계산할 수 있다.
위에서 설명한 방법으로 내부밀도가 균일하고 크기가 다양한 구형의 분말을 분리했다. 850 μm보다 큰 입자를 거르는 체는 모두 통과했지만, 50 μm보다 큰 입자를 거르는 체는 어느 것도 지나지 못했다. 이 두 체 사이에는 550, 450, 150 μm로 크기를 제한하는 세 가지 체가 있었으며, 아래의 표처럼 입자가 분리되었다. 입자의 지름을 표에 나온 크기 범위의 중간값으로 추정하여 D_i, 이에 해당되는 입자 개수를 N_i, 표면적을 S_i라 쓰자. i는 1부터 n까지의 입자분류 범위를 표시하고, 다음 표의 경우 n은 4이다. 총표면적(N_iS_i)으로 가중치를 준 평균지름 $\overline{D_2}$는 다음의 식으로 주어지는데, 표에 있는 정보를 활용하여 $\overline{D_2}$를 구하시오.

$$\overline{D_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(N_iS_iD_i)}{\sum_{i=1}^{n}(N_iS_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(N_i\pi D_i^2 D_i)}{\sum_{i=1}^{n}(N_i\pi D_i^2)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(N_iD_i^3)}{\sum_{i=1}^{n}(N_iD_i^2)}$$


크기 범위 (μm)	세분된 분말의 무게 (g)
550~850	28
450~550	30
150~450	33
50~150	29

자연계 문제 2-B 채점기준

▶출제의도

본 논제에서는 입자의 크기가 다양한 분포로 존재할 때 평균값을 정의하고 측정하는 방법을 제시하고 있다. 본 논제의 해결을 위해서는 평균지름 $\overline{D_2}$의 정의를 물리적으로 측정하는 무게로 변환하고, 정확히 계산하는 능력이 필요하다. 본 문제는 과학적 측정법을 논리적으로 파악하고 수학적으로 표현하는 능력을 평가하는데 그 목적이 있다.

▶예시답안

논제의 입자는 구형이며 밀도가 균일하기 때문에, 평균지름 $\overline{D_2}$의 정의를 물리적으로 측정하는 무게를 포함하게 변환하면 다음과 같다.

$$\overline{D_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(N_i D_i^3)}{\sum_{i=1}^{n} N_i D_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} 6M_i/(\pi\rho)}{\sum_{i=1}^{n} 6M_i/(\pi\rho D_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_i}{\sum_{i=1}^{n} M_i/D_i}$$

크기범위 (μm)	크기 범위의 중간값, D_i (μm)	세분된 분말의 무게, M_i (g)	M_i/D_i (g/μm)
850-550	700	28	0.04
550-450	500	30	0.06
450-150	300	33	0.11
150-50	100	29	0.29

$\sum M_i$ = 120 g 이고, $\sum(M_i/D_i)$ = 0.50 g/μm 이다.

따라서, 평균지름 $\overline{D_2}$는 240 μm이다. <끝>